

## 第5羽 逆行列の計算

解答・解説



### △ 要点チェック！ [目標: 2分]

- 行列  $A$  とその逆行列  $A^{-1}$  に対して必ず成り立つ関係式は？  
 ア:  $A = A^{-1}$       イ:  $AA^{-1} = O$       ウ:  $AA^{-1} = E$       エ:  $AA^{-1} = A$
- $n$  次正方行列  $A$  が逆行列をもつとき、行列式  $|A|$  と階数  $\text{Rank } A$  に成り立つ関係式は？  
 ア:  $\text{Rank } A = n, |A| = 0$       イ:  $\text{Rank } A = n, |A| \neq 0$   
 ウ:  $\text{Rank } A \neq n, |A| = 0$       エ:  $\text{Rank } A \neq n, |A| \neq 0$
- $n$  次正方行列  $A, B$  とその逆行列  $A^{-1}, B^{-1}$ 、実数  $k$  に対して必ず成り立つ関係式は？  
 ア:  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}, (kA)^{-1} = kA^{-1}$       イ:  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$   
 ウ:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = kA^{-1}$       エ:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $n$  次正方行列  $A$  の行列式  $|A|$  と逆行列の行列式  $|A^{-1}|$  に対して成り立つ関係は？  
 ア:  $|A^{-1}| = |A|$       イ:  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $n$  次正方行列  $A$  の転置行列を  ${}^tA$  とする。必ず成り立つ関係は？  
 ア:  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$       イ:  $({}^tA)^{-1} = -{}^t(A^{-1})$

### ● 計算例題

[ 1 ] ~ [ 8 ] に当てはまる数字を埋め、行列  $A$  の逆行列を求めなさい。 [目標: 3分]

[問題] $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	[誘導] $(A E) = \left( \begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$
[解答] $A^{-1} = \begin{pmatrix} [ 4 ] & [ 5 ] \\ [ 6 ] & [ 7 ] \end{pmatrix}$	$\rightarrow \left( \begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 15 & -20 & 0 & [ 1 ] \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & [ 2 ] & [ 3 ] & [ 1 ] \end{array} \right)$ $\rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{cc cc} 1 & 0 & [ 4 ] & [ 5 ] \\ 0 & 1 & [ 6 ] & [ 7 ] \end{array} \right) = (E A^{-1})$

### ◇ レベル1 [基本レベル]

問1. 次の(1)~(3)の行列に対して、逆行列を計算しなさい。 [目標: 15分]

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

問2. 次の①~④の行列の中で、逆行列を持つ行列は何個あるか答えなさい。 [目安: 4分]

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{pmatrix} 101 & 100 \\ 100 & 101 \end{pmatrix} \quad \textcircled{4} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

問3. 逆行列を用いて、次の連立方程式を解きなさい。[目標: 12分]

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 4x + y - 7z = 7 \end{cases}$$

◆ レベル2 [応用レベル]

問4. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ a & a & -1 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないとき、 $a$ の値を求めなさい。[目標: 6分]

問5. 次の行列  $A, B, C, X$  で表される(1)~(4)の式を  $X =$  の形に変えなさい。

ただし、 ${}^t(A^{-1})$  以外で括弧を使わないこと。[目標: 12分]

(例1)  $X + A = B \rightarrow X = B - A$  (例2)  $X = (AB) \rightarrow X = AB$

(1)  $AX = B$

(2)  $X = (ABC)^{-1}$

(3)  $(AX - B)^{-1} = C$

(4)  ${}^tAAX = B$

問6. 次の [★] に当てはまる数字を答えなさい。

ただし、[★] 以外の成分は求めなくてよい。[目標: 12分]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & -1 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & -4 \\ -6 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} [ ] & [ ] & [ ] & [ ] \\ [ ] & [ ] & [ * ] & [ ] \\ [ ] & [ ] & [ ] & [ ] \\ [ ] & [ ] & [ ] & [ ] \end{pmatrix}$$

★ レベル3 [発展レベル]

問7. 次の行列の逆行列を計算しなさい。[目標: 12分]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問8. 正方行列でない係数行列  $A$  からなる連立方程式  $A\vec{x} = \vec{b}$  の解  $\vec{x}$  は、 $\vec{x} = ({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tA\vec{b}$  で計算できる。このとき、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を計算しなさい。[目標: 12分]