

第5羽 逆行列の計算

解答・解説



△ 要点チェック！ [目標: 2分]

- 行列 A とその逆行列 A^{-1} に対して必ず成り立つ関係式は？
 ア: $A = A^{-1}$ イ: $AA^{-1} = O$ ウ: $AA^{-1} = E$ エ: $AA^{-1} = A$
- n 次正方行列 A が逆行列をもつとき、行列式 $|A|$ と階数 $\text{Rank } A$ に成り立つ関係式は？
 ア: $\text{Rank } A = n, |A| = 0$ イ: $\text{Rank } A = n, |A| \neq 0$
 ウ: $\text{Rank } A \neq n, |A| = 0$ エ: $\text{Rank } A \neq n, |A| \neq 0$
- n 次正方行列 A, B とその逆行列 A^{-1}, B^{-1} 、実数 k に対して必ず成り立つ関係式は？
 ア: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}, (kA)^{-1} = kA^{-1}$ イ: $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
 ウ: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = kA^{-1}$ エ: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ と逆行列の行列式 $|A^{-1}|$ に対して成り立つ関係は？
 ア: $|A^{-1}| = |A|$ イ: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- n 次正方行列 A の転置行列を tA とする。必ず成り立つ関係は？
 ア: $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ イ: $({}^tA)^{-1} = -{}^t(A^{-1})$

● 計算例題

[1] ~ [8] に当てはまる数字を埋め、行列 A の逆行列を求めなさい。 [目標: 3分]

[問題] $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	[誘導] $(A E) = \left(\begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$
[解答] $A^{-1} = \begin{pmatrix} [4] & [5] \\ [6] & [7] \end{pmatrix}$	$\rightarrow \left(\begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 15 & -20 & 0 & [1] \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc cc} 5 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & [2] & [3] & [1] \end{array} \right)$ $\rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{cc cc} 1 & 0 & [4] & [5] \\ 0 & 1 & [6] & [7] \end{array} \right) = (E A^{-1})$

◇ レベル1 [基本レベル]

問1. 次の(1)~(3)の行列に対して、逆行列を計算しなさい。 [目標: 15分]

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -6 & 5 \\ -3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

問2. 次の①~④の行列の中で、逆行列を持つ行列は何個あるか答えなさい。 [目安: 4分]

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{pmatrix} 101 & 100 \\ 100 & 101 \end{pmatrix} \quad \textcircled{4} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

問3. 逆行列を用いて、次の連立方程式を解きなさい。[目標：12分]

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 4x + y - 7z = 7 \end{cases}$$

◆ レベル2 [応用レベル]

問4. 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ a & a & -1 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列をもたないとき、 a の値を求めなさい。[目標：6分]

問5. 次の行列 A, B, C, X で表される(1)~(4)の式を $X =$ の形に変えなさい。

ただし、 ${}^t(A^{-1})$ 以外で括弧を使わないこと。[目標：12分]

(例1) $X + A = B \rightarrow X = B - A$ (例2) $X = (AB) \rightarrow X = AB$

$$(1) AX = B \quad (2) X = (ABC)^{-1}$$

$$(3) (AX - B)^{-1} = C \quad (4) {}^tAAX = B$$

問6. 次の [★] に当てはまる数字を答えなさい。

ただし、[★] 以外の成分は求めなくてよい。[目標：12分]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & -6 \\ -4 & -2 & -1 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & -4 \\ -6 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [*] & [] \\ [] & [] & [] & [] \\ [] & [] & [] & [] \end{pmatrix}$$

★ レベル3 [発展レベル]

問7. 次の行列の逆行列を計算しなさい。[目標：12分]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問8. 正方行列でない係数行列 A からなる連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解 \vec{x} は、 $\vec{x} = ({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tA\vec{b}$ で計算できる。このとき、連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を計算しなさい。[目標：12分]