

フォームの解答はこちらから↓↓↓↓



20XX 年度

第 1 回 全島統一うさぎテスト

離散数学・前編

[90 分 / 100 点]

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

[注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 試験監督はいない。自分自身が解答者とともに監督となるのだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。
3. 問題用紙は、表紙を入れずに全部で 7 ページである。
(1 ページ目は回答方法に関する説明ページである。必ず読むこと。)
4. 問題は、すべてフォーム形式にて回答を行う。フォームに入力する際の回答の注意は次のページにある。
5. 試験開始前にフォームに必要事項を入力すること。名前はペンネームでよいが、**解答問い合わせの際に必須なので必ず自分自身で控えておくこと。**
6. 問題 1～問題 8 まですべて必答問題で、回答番号は ～ です。
7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。
8. 解説は「工業大学生ももやまのうさぎ塾」の記事内にあるので、解き終わったら復習用にご覧いただけたら幸いです。
9. 勉強は期末試験 3 日前くらいからはしてください。くれぐれも前日に漢字 2 文字で呼ばれる某エナジードリンクを飲みながら一夜漬けすることのないように…。

[フォーム解答における注意]

1. 最初のページで、受験番号、名前（ペンネーム OK）、性別、学年情報を入れること。性別は別に本当の性別でなくてよい。ここまでは試験開始前に行ってよい。
2. 特に問題上における指示がない場合、空欄は、整数が入る。例を示すので参考にすること。指示がある場合、指示に従うこと。

例 1. $23 + 35 =$ ← 答えは 58 なので、No.10 には 58 を入力。

例 2. ①～④の中から、一番速い乗り物を 1 つ選びなさい。回答番号：

① 新幹線 ② バス ③ 飛行機 ④ 人間

↑ 答えは③なので No.11 には 3 を入力。

3. フォーム内で数値を直接入力する場合、必ず半角数字で入力し、半角数字以外の余計な記号は入力しないこと。
4. 線形代数のフォームと異なり、選択肢が与えられていない場合の空欄には、10 以上や-10 以下の整数が当てはまることもあるため、注意すること。
5. フォームの解答用紙は 1 ページ目右上の QR コードにあります。

QR コードがダメな人はこちらの URL を手打ち！ → <http://bit.ly/usamoshi-risan1>

[数学上における注意]

1. 特に指示がない場合、 Z は整数全体の集合、 N は自然数全体の集合とする。
2. 特に指示がない場合、自然数には 0 が含まれるとする。
3. ϕ は空集合を表す。

問題 1. [論理式] (配点 7) [回答番号]

次の A_1, A_2, A_3, A_4 の論理式

$$A_1 = (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

$$A_2 = p \wedge (q \rightarrow r)$$

$$A_3 = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r)$$

$$A_4 = (p \vee r) \wedge (q \rightarrow r)$$

からなる論理式の集合を L とする。

このときの論理的同値関係 \equiv による L の分割 L/\equiv として正しいものを 1 つ選びなさい。回答番号:

★ の選択肢 ★

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| ① $\{\{A_1, A_2\}, \{A_3, A_4\}\}$ | ② $\{\{A_1, A_3\}, \{A_2, A_4\}\}$ | ③ $\{\{A_1, A_4\}, \{A_2, A_3\}\}$ |
| ④ $\{\{A_1\}, \{A_2, A_3, A_4\}\}$ | ⑤ $\{\{A_2\}, \{A_1, A_3, A_4\}\}$ | ⑥ $\{\{A_3\}, \{A_1, A_2, A_4\}\}$ |
| ⑦ $\{\{A_4\}, \{A_1, A_2, A_3\}\}$ | ⑧ 上記以外 | |

問題 2. [集合の基礎] (配点 7) [回答番号 ~]

集合 S を $S = \{1, \{\phi, 2\}\}$ とする。

次の(2)~(8)の集合に対する関係が成り立つのであれば 1 を、成り立たないのであれば 2 を括弧番号と同じ回答番号に入力しなさい。例えば(2)の問題は に回答すること。

- (2) $1 \in S$
- (3) $\phi \subseteq S$
- (4) $\{\phi, 2\} \in S$
- (5) $\{\phi, 2\} \in 2^S$
- (6) $\{\phi, \{1\}\} \subseteq 2^S$
- (7) $\{1\} \subseteq 2^S$
- (8) $\{\{1\}\} \in 2^S$

問題 3. [二項関係の 4 つの性質] (配点 24) [回答番号 ~]

2 項関係 R_1, R_2 が次のように定義されている。(ただし自然数 N は 0 を含むとする)

$$xR_1y \Leftrightarrow 2x = y$$

$$xR_2y \Leftrightarrow \exists n \in N \quad \text{s.t.} \quad 2x + y = 3n$$

このとき、 R_1, R_2 が反射性、対称性、反対称性、推移性の各性質を満たすのであれば 1 を、満たさないのであれば 2 を対応する回答欄 ~ に入力しなさい。

関係	反射性	対称性	反対称性	推移性
R_1	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="10"/>	<input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="12"/>
R_2	<input type="text" value="13"/>	<input type="text" value="14"/>	<input type="text" value="15"/>	<input type="text" value="16"/>

問題4. [述語論理] (配点 12) [回答番号 ~]

S_1, S_2, S_3 が次のように定義されている

$$S_1 = \{1,2,3,4\}$$

$$S_2 = \mathbf{N} - \{0\} \text{ (0 以外の自然数)}$$

$$S_3 = \mathbf{Z} - \{0\} \text{ (0 以外の整数)}$$

さらに、 $S_1 \times S_1, S_2 \times S_2, S_3 \times S_3$ 上の 2 項関係 \sqsubseteq, \sqsubset を以下のように定義する。

$$(x, y) \sqsubseteq (z, w) \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{z}{w}$$

$$(x, y) \sqsubset (z, w) \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{z}{w}$$

このとき、領域 S_1, S_2, S_3 それぞれに対し、次の論理式 A_1, A_2, A_3, A_4 が真になる場合は

1、偽になる場合は 2 を対応する回答番号 ~ に入力しなさい。

$$A_1 = \forall x \forall y \exists z \exists w ((x, y) \sqsubseteq (z, w))$$

$$A_2 = \forall x \forall y \exists z \exists w ((x, y) \sqsubset (z, w))$$

$$A_3 = \exists x \exists y \forall z \forall w ((x, y) \sqsubseteq (z, w))$$

$$A_4 = \exists x \exists y \forall z \forall w ((x, y) \sqsubset (z, w))$$

論理式	S_1	S_2	S_3
A_1	<input type="text" value="17"/>	<input type="text" value="18"/>	<input type="text" value="19"/>
A_2	<input type="text" value="20"/>	<input type="text" value="21"/>	<input type="text" value="22"/>
A_3	<input type="text" value="23"/>	<input type="text" value="24"/>	<input type="text" value="25"/>
A_4	<input type="text" value="26"/>	<input type="text" value="27"/>	<input type="text" value="28"/>

問題5. [ハッセ図] (配点 16) [回答番号 ~]

次の図1のハッセ図で表される半順序集合 $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ および X の部分集合 $S = \{b, c, e, h\}$ が存在する。このとき、次の(29)~(36)に当てはまるものを選択肢の中からすべて選び、括弧番号と同じ回答番号に入力しなさい。

例えば(29)の問題は に回答すること。ただし、存在しない場合は「9. なし」のみを選択しなさい。

- (29) 上界
- (30) 下界
- (31) 極大元
- (32) 極小元
- (33) 最大元
- (34) 最小元
- (35) 上限
- (36) 下限

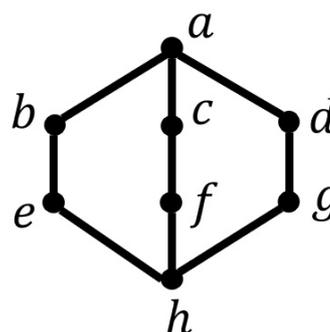


図1: 問題5のハッセ図

★ ~ の選択肢 ★

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e ⑥ f ⑦ g ⑧ h ⑨ なし

[例] a, c と答える場合 → “①, ③” の2つを選択

問題6. [数え上げ] (配点 6) [回答番号 ~]

集合 A を $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、集合 B を $B = \{a, b, c\}$ とする。このとき、次の(37)~(42)で指示された数を数え上げ、その数を括弧番号と同じ回答番号に記述しなさい。例えば(37)の問題は に回答すること。ただし必要であれば $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ を用いてもよい。 ※ 回答は半角数字・整数で行うこと

- (37) 集合 A のべき集合 2^A の要素数
- (38) $\{3, 4\} \subseteq X \subseteq A$ を満たす集合 X の要素数
- (39) 直積集合 $B \times B$ の要素数
- (40) 集合 B の二項関係の総数
- (41) 集合 A から集合 B への全域関数で相異なるもの
- (42) 集合 A から集合 A への1対1対応(全域的全単射)の個数

問題 7. [数学的帰納法] (配点 10) [回答番号 ~]

次の命題を数学的帰納法を用いて証明したい。

$n \geq 5$ のとき、 $2^n > n^2$ が常に成り立つ。

回答番号 ・ ・ ・ については下の選択肢から最も適切な式、語句を選び、番号で回答し、それ以外の回答番号については、当てはまる整数を回答欄に入力することで証明を完成させなさい。

[証明]

(左辺) > (右辺) を示すためには、(左辺) - (右辺) > であることを示せばよい。ここで、次の(1), (2)を考える。

(1) $n =$ のとき

$$(左辺) - (右辺) = \text{} > \text{}$$

より、(1)において成立する。

(2) $n \geq 5$ に対し、 $n = k$ のとき命題が成立すると仮定する。

ここで、 $n =$ のとき

$$\begin{aligned} (左辺) - (右辺) &= 2^{\text{}} - (\text{})^2 \\ &= 2 \cdot 2^{\text{}} - (\text{})^2 \\ &> 2 \cdot k^2 - (\text{})^2 \quad (\because \text{}) \\ &= (k - \text{})^2 - \text{} \\ &\geq \text{} \quad (\because \text{}) \\ &> \text{} \end{aligned}$$

より、(2)においても成立する。

(1), (2)より題意は満たされ、 $n \geq 5$ のとき、 $2^n > n^2$ が常に成り立つことが数学的帰納法により証明できた。

★ ・ の選択肢 ★

- ① $k-1$ ② k ③ $k+1$ ④ $k+2$ ⑤ $k+3$
⑥ $k+4$ ⑦ $k+5$ ⑧ $k+6$ ⑨ $k+7$

★ ・ の選択肢 ★ [ヒント: \because は式変形の理由を表します]

- ① 背理法の仮定 ② 弧度法の仮定 ③ 帰納法の仮定 ④ 勘
⑤ $n=5$ ⑥ $n \neq 5$ ⑦ $n \geq 5$ ⑧ $n < 5$

問題 8. [差分方程式(漸化式)] (配点 18) [回答番号 ~]

次の(1), (2)の問いに答えなさい。

※ 空欄 ~ には整数が入る。

(1) 差分方程式

$$f(n) - 4f(n-1) + f(n-2) + 6f(n-3) = 0$$

の一般解と特殊解を求めたい。

(i) 一般解は、任意定数 C_1, C_2, C_3 を用いて

$$f(n) = C_1([\text{53}])^n + C_2([\text{54}])^n + C_3([\text{55}])^n$$

と求めることができる。(ただし < <)

(ii) $f(0) = -1, f(1) = 3, f(2) = -3$ とする。すると、 $C_1 = [\text{56}]$ 、 $C_2 = [\text{57}]$ 、 $C_3 = [\text{58}]$ となり、特殊解を求めることができる。

(2) 差分方程式

$$f(n) - 5f(n-1) + 6f(n-2) = 4n - 6$$

の特殊解の 1 つは、 $f(n) = an + b$ とおくことで、

$$f(n) = [\text{59}]n + [\text{60}]$$

と求めることができる。

問題は以上です。お疲れさまでした。

本番の試験も頑張りましょう！