フォームの解答はこちらから↓↓↓↓

20XX 年度

第 3 回　全島統一うさぎテスト

線形代数・後編

［90 分 / 150 点］

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

［注意事項］

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 試験監督はいない。**自分自身が解答者とともに監督となる**のだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。
3. 問題用紙は、表紙を入れずに全部で **13 ページ**である。
4. 問題は、フォーム形式の問題と記述形式の問題がある。記述形式の問題の解答用紙は付属していないため、ご家庭にある A4 用紙(両面)を 1 枚使うこと。
5. 試験開始前に必ず「受験番号」を入力すること。受験番号には自分の好きな数字・アルファベットを入れていいが、**解答問い合わせの際に必須**なので必ず自分自身で控えておくこと。
6. **記述形式の問題 8 ～問題 11 は選択問題**である。いずれか 1 題を選び、解答すること。2 題以上解答した場合、解答が無効になることがあるので注意すること。なお、問題の選択形式は以下の通りである。

形式	フォーム（80 点）					記述（70 点）					
問題	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
選択パターン	●	●	●	●	●	●	●	○			
	●	●	●	●	●	●	●		○		
	●	●	●	●	●	●	●			○	
	●	●	●	●	●	●	●				○

7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。
8. 後期の線形代数は量が多いので、早め早めに勉強してください。

［フォーム解答における注意］

1. 現役の九工大生は、受験番号の他に名前（ペンネーム OK）、性別、学年情報を入れること。**性別は別に本当の性別でなくてよい**。ここまでは試験開始前に行ってよい。

2. 特に問題上における指示がない場合、空欄は、**-9 以上 9 以下の整数**が入る。例を示すので参考にすること。指示がある場合、指示に従うこと。

例 1. 3 – 5 = $\boxed{10}$ ← 答えは -2 なので、**No.10** には **-2** を入力。

例 2. ①～④の中から、一番速い乗り物を 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{11}$

① 新幹線　② バス　③ 飛行機　④ 人間

↑答えは③なので **No.11** には **3** を入力。

3. 行列、ベクトルについて解答する場合、**番号が書かれている成分についてのみ**解答すること。例えば、下の例の場合、**No.12** には **-3** を、**No.13** には **0** を入力すること。

$$[\text{問題}]\ A = \begin{pmatrix} [\ 12\ ] & [\quad] \\ [\quad] & [\ 13\ ] \end{pmatrix} \qquad [\text{正解}]\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 答えにルートが含まれる場合、**ルートの中に現れる自然数が最小になるように**解答すること。例えば $4\sqrt{2}$ と答える問題を $2\sqrt{8}$ と答えないこと。なお、行列やベクトルに対しても適用されるので注意すること。

$$[\text{正解}]\ \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [\text{だめな例}]\ \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. フォーム形式の回答番号は $\boxed{1}$～$\boxed{56}$ です。

6. フォームの解答用紙は 1 ページ目右上の QR コードにあります。

QR コードがダメな人はこちらの URL を手打ち！ → https://bit.ly/3jV8Lbv

［**数学上における注意**］

1. 特に指示がない場合、行列、ベクトルの成分はすべて実数である。
2. 特に指示がない場合、小文字の太字（例: $\boldsymbol{a}$ ）は縦ベクトルを表す。
3. 特に指示がない場合、E は単位行列、O は零行列を表す。
4. $\boldsymbol{0}$（太文字の 0）は零ベクトルを表す。
5. ${}^t\!A$ は行列 A の転置行列を表す。
6. $|\boldsymbol{a}|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対する内積を表す。

問題 1.［小問集合］（配点　20）　［ マーク番号 $\boxed{1}$〜$\boxed{15}$ ］

(1) 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ がある。以下の(i), (ii)の問いに答えなさい。

（i）　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立であるとする。

このとき、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ に対して必ず成り立つ関係式として正しいものを①〜④の中から 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{1}$

① $|A| = 0$　　② $|A| \neq 0$　　③ $|A| > 0$　　④ $|A| < 0$

（ii）以下の①〜⑤の命題の中から、必ず成立する文章を 1 つ選びなさい。

回答番号：$\boxed{2}$

① $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線形独立ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{0}$ は線形独立である。

② $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線形独立ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形従属である。

③ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が線形従属ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立である。

④ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立ならば $3\boldsymbol{a}_1, 3\boldsymbol{a}_2, 4\boldsymbol{a}_3$ は線形独立である。

⑤ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立ならば $3\boldsymbol{a}_1, 3\boldsymbol{a}_2, 4\boldsymbol{a}_3$ は線形従属である。

(2) n 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ がある。以下の(i)〜(iii)の問いに答えなさい。

（i）内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ の定義式として正しいものを 1 つ選びなさい。

回答番号：$\boxed{3}$

① $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$　　② $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}$　　③ ${}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}$　　④ $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$　　⑤ ${}^t\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y}$

（ii）ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の内積・大きさについて述べた以下の文章の中で、正しい文章は何個あるか。個数を回答欄に入力しなさい。（例：正しい文章が 2 つ → 2 と回答）

回答番号：$\boxed{4}$

① $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$

② $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$

③ $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \geqq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$

④ $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|$

⑤ $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

(iii) 複素数を成分とするベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考える。このとき、次の(ア),(イ)の式がともに必ず成立するものになっているものを、以下の①～④から選びなさい。ただし、c は複素数とし、$\bar{c}$ は c の共役複素数を表す。回答番号：$\boxed{5}$

選択肢	（ア）	（イ）
①	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$	$(c\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\bar{c}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
②	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}\cdot(c\boldsymbol{y})=\bar{c}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
③	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$	$(c\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\bar{c}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$
④	$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{x}\cdot(c\boldsymbol{y})=\bar{c}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$

(3) 写像 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ がある。以下の(i)～(iii)の問いに答えなさい。

(i) f が線形写像である定義として正しいものはどれか。
ただし、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n,\ k \in \mathbf{R}$ とする。回答番号：$\boxed{6}$

① $\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) \end{cases}$　② $\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(k\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}) \end{cases}$

③ $\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(k\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x}) \end{cases}$　④ $\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(\boldsymbol{x})=kf(\boldsymbol{x}) \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \\ f(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y}) \end{cases}$　⑥ この中に正しいものはない

(ii) f を線形変換とし、条件 $f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ を満たすとする。このときの線形変換 f をなんというか。正しいものを選びなさい。回答番号：$\boxed{7}$

① 正規変換　② 対称変換　③ 等価変換　④ 固有変換　⑤ 直交変換

(iii) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を線形写像とする。核の次元 $\dim \operatorname{Ker} f$、像の次元 $\dim \operatorname{Im} f$ について必ず成立する式を 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{8}$

① $n=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f$
② $m=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f$
③ $0=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f$
④ $n=|\dim \operatorname{Ker} f-\dim \operatorname{Im} f|$
⑤ $m=|\dim \operatorname{Ker} f-\dim \operatorname{Im} f|$
⑥ $0=|\dim \operatorname{Ker} f-\dim \operatorname{Im} f|$

（4）直交行列について、(i), (ii)の問いに答えなさい。

(i) n 次正方行列 A を直交行列とする。このとき必ず成り立つ式を①～④、⑤～⑧からそれぞれ 1 つずつ選びなさい。回答番号：①～④ → $\boxed{9}$　⑤～⑧ → $\boxed{10}$

① ${}^tA = A$　② ${}^tAA = A{}^tA = O$　③ ${}^tAA = A{}^tA = E$　④ ${}^tAA = A{}^tA = A$

⑤ $\mathrm{Rank}\,A = 0$　⑥ $\mathrm{Rank}\,A = 1$　⑦ $|A| = 0$　⑧ $|A| = \pm 1$

(ii) 次の①～⑧の行列のうち、直交行列であるものを①～④、⑤～⑧からそれぞれ 1 つずつ選びなさい。回答番号：①～④ → $\boxed{11}$　⑤～⑧ → $\boxed{12}$

① $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$　② $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$　③ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$　④ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑦ $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　⑧ $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

（5）つぎの①～⑥の行列のうち、直交行列で対角化可能な行列は何個あるか。個数を回答欄に入力しなさい。（例： 2 つ → 2 と回答）　回答番号：$\boxed{13}$

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　⑥ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（6）n 次実対称行列 A により定められる 2 次形式 $q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ があるとする。

(i) 任意の $\boldsymbol{x}$ に対し、$q(\boldsymbol{x}) > 0$ を満たすことをなんというか。回答番号：$\boxed{14}$

①　正則　②　直交　③　極大　④　ジョルダン　⑤　ジョーダン

⑥　閾値　⑦　正定値　⑧　半正定値　⑨　血糖値

(ii) (i)のとき、行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に対して常に成り立つ関係として正しいものを 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{15}$

① $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n > 0$

② $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n > 0$

③ $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0,\ \cdots\ ,\ \lambda_n > 0$

問題２．［写像］（配点　20）　［ マーク番号 $\boxed{16}$～$\boxed{34}$ ］

（1）線形写像に関する文章を読み、空欄に入る整数として正しいものをそれぞれ入力しなさい。

（i）$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ への線形写像 f が

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

を満たすとする。このときの表現行列 A は、

$$A=\begin{pmatrix}[\ \mathbf{16}\ ] & [\ \mathbf{17}\ ]\\ [\ \mathbf{18}\ ] & [\ \mathbf{19}\ ]\end{pmatrix}$$

となる。

（ii）$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ への線形写像 f が

$$f\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

を満たすとする。このときの表現行列 B は、

$$B=\begin{pmatrix}[\ \mathbf{20}\ ] & [\quad\ ] & [\ \mathbf{21}\ ]\\ [\quad\ ] & [\quad\ ] & [\quad\ ]\\ [\ \mathbf{22}\ ] & [\quad\ ] & [\ \mathbf{23}\ ]\end{pmatrix}$$

となる。

（iii）$\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ への線形写像 f の表現行列 C は $\boxed{24}$ 行 $\boxed{25}$ 列となる。

(2) 次の線形写像 f, g

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+3x_2\\3x_1+x_2+3x_3\end{pmatrix},\qquad g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\3x_1+2x_2\\-x_1-x_2\end{pmatrix}$$

がある。(i)〜(iii)の問いに答えなさい。

(i) f の表現行列を A 、g の表現行列を B とする。すると、

$$A=\begin{pmatrix}[\quad] & [\quad] & [\ \mathbf{26}\ ]\\ [\quad] & [\quad] & [\quad]\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}[\ \mathbf{27}\ ] & [\quad]\\ [\quad] & [\quad]\\ [\quad] & [\quad]\end{pmatrix}$$

と求められる。

(ii) 合成写像 $f\circ g$ の表現行列を C 、$g\circ f$ の表現行列を D とする。すると、

$$C=\begin{pmatrix}[\quad] & [\ \mathbf{28}\ ]\\ [\ \mathbf{29}\ ] & [\ \mathbf{30}\ ]\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}[\quad] & [\quad] & [\quad]\\ [\quad] & [\quad] & [\quad]\\ [\ \mathbf{31}\ ] & [\ \mathbf{32}\ ] & [\ \mathbf{33}\ ]\end{pmatrix}$$

となる。

(iii) 合成写像 $f\circ g$、$g\circ f$ に逆変換は存在するか。正しい文章を①〜④から選び、番号で解答しなさい。回答番号：$\boxed{\mathbf{34}}$

① $f\circ g,\ g\circ f$ ともに逆変換は存在する。

② $f\circ g$ には逆変換が存在するが、$g\circ f$ には逆変換が存在しない。

③ $g\circ f$ には逆変換が存在するが、$f\circ g$ には逆変換が存在しない。

④ $f\circ g,\ g\circ f$ ともに逆変換は存在しない。

問題３．［部分空間］（配点　15）　［ マーク番号 $\boxed{35}$～$\boxed{37}$ ］

つぎの(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1) つぎの(a), (b)の集合は $\mathbf{R}^3$ の部分空間か。正しい選択肢を①～④の中から 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{35}$

(a)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 6x_1 = 3x_2 + 4x_3 \right\}$$

(b)

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 6x_1 \geqq 3x_2 + 4x_3 \right\}$$

［選択肢］

① (a), (b)ともに $\mathbf{R}^3$ の部分空間である。

② (a)は $\mathbf{R}^3$ の部分空間だが、(b)は $\mathbf{R}^3$ の部分空間ではない。

③ (b)は $\mathbf{R}^3$ の部分空間だが、(a)は $\mathbf{R}^3$ の部分空間ではない。

④ (a), (b)ともに $\mathbf{R}^3$ の部分空間ではない。

(2) つぎの $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が生成する部分空間の次元はいくらか。次元を回答欄に入力しなさい。回答番号：$\boxed{36}$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ が生成する部分空間の次元が 3 となるような c の値を求め、回答欄に入力しなさい。回答番号：$\boxed{37}$

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問題４．［正規直交基底の作成］（配点　10）　［ マーク番号 $\boxed{38}$ ～ $\boxed{47}$ ］

つぎの $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ある。このベクトルに対してグラム・シュミットの直交化法を順に適用する。すると、以下のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ からなる正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を得ることができる。

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{[\ \mathbf{38}\ ]}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} [\ \mathbf{39}\ ] \\ [\ \mathbf{40}\ ] \\ [\ \mathbf{41}\ ] \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{[\ \mathbf{42}\ ]}} \begin{pmatrix} [\ \mathbf{43}\ ] \\ [\ \mathbf{44}\ ] \\ [\ \mathbf{45}\ ] \end{pmatrix}$$

ここで、本当にグラム・シュミットの直交化法を行うと正規直交基底になるかを確認しよう。すると、$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = \boxed{46}$ 、 $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boxed{47}$ となるので、たしかに正規直交基底であることが確認できる。

問題５．［対角化］（配点　15）　［ マーク番号 $\boxed{48}$〜$\boxed{56}$ ］

（1）次の固有値、固有ベクトルに関する(i)〜(iii)の問題に答えなさい。

（i）ある正方行列 A の固有値に 4 が含まれており、さらに固有値 4 の固有ベクトルの 1 つが $\boldsymbol{x}$ である。このとき、式 1、式 2 がともに必ず成立する式となっている選択肢を①〜⑧の中から 1 つ選びなさい。回答番号：$\boxed{48}$

選択肢	式 1	式 2
①	$A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$	$(A-4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
②	$A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$	$(A+4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
③	$A^2\boldsymbol{x} = 4A\boldsymbol{x}$	$(A-4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
④	$A^2\boldsymbol{x} = 4A\boldsymbol{x}$	$(A+4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
⑤	$A^2\boldsymbol{x} = 16A\boldsymbol{x}$	$(A-4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
⑥	$A^2\boldsymbol{x} = 16A\boldsymbol{x}$	$(A+4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
⑦	$A^2\boldsymbol{x} = 64A\boldsymbol{x}$	$(A-4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
⑧	$A^2\boldsymbol{x} = 64A\boldsymbol{x}$	$(A+4E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

（ii）固有値、固有ベクトルに関する記述として最も適切なものを 1 つ選びなさい。
回答番号：$\boxed{49}$

① 固有値に 0 が含まれる行列は絶対に対角化不可能である。

② 固有値に重解が含まれない行列は必ず対角化できる。

③ ある固有値に対し、1 つも固有ベクトルが存在しないことがある。

④ 相異なる固有値に対する固有ベクトルが線形従属になることがある。

（iii）ある n 次正方行列 A（ただし $n \geqq 3$）の固有値は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の 3 つで、さらに正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ を対角化することができる。このとき、必ず成立する式はどれか。1 つ選び、番号で答えなさい。回答番号：$\boxed{50}$

① $\dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dim V(\lambda_3) = 0$

② $1 \leqq \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dim V(\lambda_3) \leqq n-1$

③ $\dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dim V(\lambda_3) = n$

④ $\dim V(\lambda_1) = \dim V(\lambda_2) = \dim V(\lambda_3) = 1$

⑤ $\dim V(\lambda_1) = \dim V(\lambda_2) = \dim V(\lambda_3) = n$

（2）行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

に対して対角化を行う。

（i）A の固有値は 3 と $\boxed{\textbf{51}}$ となる。

また、固有値 3 に対する重複度は $\boxed{\textbf{52}}$ である。

（ii）固有値 3 に対する固有ベクトルとして、以下の 2 本が得られる。

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ [\ \textbf{53}\ ]\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ [\ \textbf{54}\ ]\end{pmatrix}$$

また、固有値 $\boxed{51}$ に対する固有ベクトルとして、以下の 1 本が得られる。

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}[\ \textbf{55}\ ]\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

（iii）ここで、正則な行列 P を、

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & [\ 55\ ] \\ 0 & 2 & 1 \\ [\ 53\ ] & [\ 54\ ] & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。すると、$\boxed{56}$ 。

$\boxed{56}$ に文章として正しいものを①～⑤から選び、正しいものを入力しなさい。

① $P^{-1}AP=D$ を用いて対角化することができる。ただし、D は以下の行列である。

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

② $P^{-1}AP=D$ を用いて対角化することができる。ただし、D は以下の行列である。

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & [\ 51\ ] \end{pmatrix}$$

③ $P^{-1}AP=D$ を用いて対角化することができる。ただし、D は以下の行列である。

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & [\ 51\ ] & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

④ $P^{-1}AP=D$ を用いて対角化することができる。ただし、D は以下の行列である。

$$D=\begin{pmatrix} [\ 51\ ] & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⑤ 対角化ができないことがわかる。

［フォームに回答する問題は以上です。］

問題６．［記述小問集合］（配点　30）［必答問題］

次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

（1）つぎの行列 A から定まる線形写像 f があるとする。(i), (ii)の問いに答えなさい。

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

（i）核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底１組を求めなさい。

（ii）像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元と基底１組を求めなさい。

（2）つぎのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ がある。(i), (ii)の問いに答えなさい。

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}4\\-7\\7\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

（i）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が生成する $\mathbf{R}^3$ の部分空間の基底を求めなさい。

（ii）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうち、部分空間の基底に含まれないベクトルすべてを(i)で求めた基底の線形結合（１次結合)で表しなさい。

（3）写像

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\qquad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_1+3x_2\end{pmatrix}$$

は線形写像か。線形写像であればその証明を、線形写像でなければ反例を１つ挙げなさい。

問題７．［対角化］（配点　20）［必答問題］

行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化したい。

（1）行列 A の固有値をすべて求めなさい。

（2）それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい。固有ベクトルの代わりに固有空間を求めてもよい。

（3）行列 A は対角化可能か。可能であれば正則行列 P を用いて A を対角化しなさい。不可能であれば、対角化ができない理由を書きなさい。

◆つぎの問題８～問題 11 は選択問題です。いずれか 1 問選び解答しなさい。◆

問題８．［直交行列を用いた対角化＋2 次形式］（配点　20）［選択問題］

（1）実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

を直交行列 P を用いて対角化しなさい。

(2) 2 次形式

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

の標準形、および標準形にする直交変数変換の式を 1 つ求めなさい。

問題９．［2 次形式・2 次曲線］（配点　20）［選択問題］

(1) 2 次形式 $5x^2 - 2xy + 5y^2$ の標準形を求めなさい。

(2) 2 次曲線 $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y - 7 = 0$ の標準形を求めなさい。

(3) 2 次曲線 $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y - 7 = 0$ のグラフを書きなさい。

問題 10.［行列の $\boldsymbol{n}$ 乗］（配点　20）［選択問題］

行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

のべき乗 A^n を求めなさい。

問題 11.［ジョルダン標準形］（配点　20）［選択問題］

行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。正則行列 P を用いてジョルダン標準形 $J = P^{-1}AP$ を求めなさい。

［問題は以上です。お疲れさまでした。期末試験も頑張りましょう。］