

フォームの回答はこちらから↓↓↓↓



20XX 年度

# 第 1 回 全島統一うさぎテスト

オートマトンと言語理論編

[90 分 / 100 点]

試験が始まるまで、以下の注意事項、次のページの解答上の注意を読みなさい。

## [注意事項]

1. 試験開始の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
2. 試験監督はいない。自分自身が解答者とともに監督となるのだ。必要なら友達や恋人を監督にしてもよい。
3. 問題用紙は、表紙を入れずに全部で 5 ページである。
4. 問題 1、問題 2 は記述式の問題、問題 3、問題 4 はフォーム式の問題である。フォーム式の回答方法の注意については、次のページに記載されている。
5. 試験開始前にフォームに必ず「受験番号」を入力すること。受験番号は任意の文字列でよいが、解答問い合わせの際に必須なので必ず自分自身で控えておくこと。
6. 問題 1～問題 4 まですべて必答問題です。
7. 万が一、誤字が発見された場合、問題作成主に報告してくれたら幸いです。
8. 解説は「工業大学生ももやまのうさぎ塾」の記事内にあるので、解き終わったら復習用にご覧いただけたら幸いです。
9. 勉強は期末試験 3 日前くらいからはしてください。くれぐれも前日に漢字 2 文字で呼ばれる某エナジードリンクを飲みながら一夜漬けすることのないように…。
10. 本模試では、うさぎ模試の問題用紙上に記載する広告を募集しています。興味がある方がいらっしゃいましたら、メールや DM などでお知らせください。

### [フォーム解答における注意]

1. 問題 3、問題 4 はすべてフォーム上で答える問題である。フォーム上で答える問題は 50 点分ある。
2. 最初のページで、受験番号を入れること。ここまでは試験開始前に行ってよい。
3. 特に問題上における指示がない場合、下に与えられた選択肢の中から、最も適切なものを 1 つ選び、記号で答えること。

例. 日本で一番りんごの収穫量が多い都道府県は？

- ① 北海道    ② 青森県    ③ 長野県    ④ 福岡県

答. 答えは青森県なので②を選択。

4. 数を答える場合は、必ず半角の数字で答え、余分な記号（ピリオドなど）は入力しないこと。

例. 2021 年 12 月現在、Perfume は何人組のグループ？

答. 3 人なので半角数字で「3」と入力。

5. フォームの解答用紙は 1 ページ目右上の QR コードにあります。

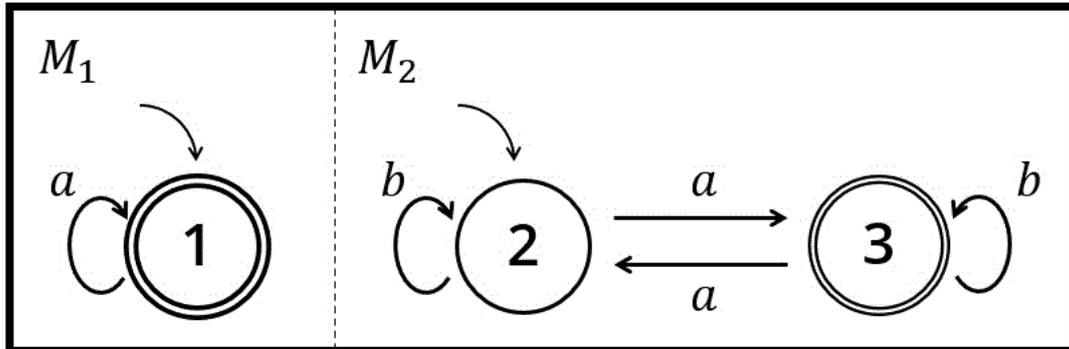
QR コードがダメな人はこちらの URL を手打ち！ → [https://bit.ly/auto\\_usms](https://bit.ly/auto_usms)

### [数学上における注意]

1. 状態遷移図を答える問題の場合、必ず**最簡形**の(状態数が最も少ない)完全決定性有限オートマトンで解答すること。
2. 自然数は、1 以上の整数を表す。
3. 特に指示がない場合、 $i, j, k, n$  などの変数は自然数とする。
4.  $|x|_a$  は、語  $x$  に含まれる  $a$  の個数を表す。例えば、 $|ababaabb| = 4$  である。
5.  $x^R$  は、語  $x$  の反転を表す。例えば、 $(bbaba)^R = ababb$  である。
6.  $\bar{L}$  は、 $L$  の補集合を表す。（ $L^c$  と表記する先生もいる）
7. 正規文法を正則(文法)と呼ぶこともある。
8.  $x \cdot y$  は語  $x$  と語  $y$  の接続を表す。

問題 1. [オートマトンの演算] (配点 30)

$\Sigma = \{a, b\}$  上の非決定性有限オートマトン(NFA)  $M_1$  と、決定性有限オートマトン(DFA)  $M_2$  が以下のような状態遷移図で与えられている。



このとき、(1)~(5)の問いに答えなさい。

- (1)  $M_1$  を完全決定性有限オートマトンにし、さらに最簡形でなければ最簡形の完全決定性有限オートマトンに変換し、状態遷移図を書きなさい。
- (2)  $\Sigma^* - L(M_2)$  を受理(認識)する**最簡形**の完全決定性有限オートマトン(最小状態 DFA)を求め、状態遷移図で答えなさい。
- (3)  $L(M_1) \cup L(M_2)$  を受理する**最簡形**の完全決定性有限オートマトン(最小状態 DFA)を求め、状態遷移図で答えなさい。
- (4)  $L(M_1) - L(M_2)$  を受理する**最簡形**の完全決定性有限オートマトン(最小状態 DFA)を求め、状態遷移図で答えなさい。
- (5) 接続  $L(M_1) \cdot L(M_2)$  を受理する**最簡形**の完全決定性有限オートマトン(最小状態 DFA)を求め、状態遷移図で答えなさい。

問題2. [正規言語の記述とマイヒルネロードの定理] (配点 20)

$\Sigma = \{a, b\}$  とする。次の言語  $L_1, L_2$  は正規言語 (正則) か正規言語でないかを答えなさい。さらに正規言語であれば、与えられた言語を認識する最簡形の完全決定性有限オートマトン (DFA) の状態遷移図を、正規言語でなければ正規言語ではないことをマイヒルネロード (Myhill–Nerode) の定理を用いて示しなさい。また、 $i, j$  は 0 以上の整数とする。

(1)  $L_1 = \{a^i a^i b^j \mid i \geq 0, j \geq 0\}$

(2)  $L_2 = \{a^i b^j a^i \mid i \geq 0, j \geq 0\}$

問題 3. [正規言語の判定] (配点 30)

$\Sigma = \{a, b\}$  とする。次の(1)~(10)それぞれにある[X], [Y]の文章について、その正誤の組み合わせとして正しいものを下の選択肢①~④から1つ選びなさい。ただし、 $i, j, k$  は自然数 (1以上の整数)、 $x^R$  は語  $x$  の反転とし、言語は  $\Sigma$  上の言語を表す。

- (1) [X] 言語  $\{a^i b^i \mid i \leq 1000\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{a^i b^i \mid i \geq 1000\}$  は正規言語である。
- (2) [X] 言語  $\{a^i b^j \mid i \leq 1000, j \leq 1000\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{a^i b^j \mid i \geq 1000, j \geq 1000\}$  は正規言語である。
- (3) [X] 言語  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a + |x|_b \geq 334\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a - |x|_b \leq 334\}$  は正規言語である。
- (4) [X] 言語  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a + |x|_b = 2k \text{ を満たす } k \text{ が存在する}\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a \times |x|_b = 2k \text{ を満たす } k \text{ が存在する}\}$  は正規言語である。
- (5) [X] 言語  $\{x \mid x \in \Sigma^*, x = x^R\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{xbx \mid x \in \Sigma^*\}$  は正規言語である。
- (6) [X] 言語  $\{xa^i b^i \mid x \in \Sigma^*, i \geq 1\}$  は正規言語である。  
[Y] 言語  $\{xa^i b^i y \mid x \in \Sigma^*, y \in \Sigma^*, i \geq 1\}$  は正規言語である。
- (7) [X] 任意の言語  $L$  に対し  $\Sigma^* - L$  が正規言語ならば、 $L$  も正規言語である。  
[Y] 任意の言語  $L_1, L_2$  に対し  $L_1 - L_2$  が正規言語ならば、 $L_1 \cap L_2$  も正規言語である。
- (8) [X] 任意の言語  $L_1, L_2$  に対し、 $L_1 \cup L_2$  が正規言語でないならば、 $L_1, L_2$  のうち、少なくとも一方は正規言語ではない。  
[Y] 任意の言語  $L_1, L_2$  に対し、 $L_1, L_2$  が両方とも正規言語ではないならば、 $L_1 \cup L_2$  も正規言語ではない。
- (9) [X] 任意の言語  $L$  に対し、 $L$  が文脈自由文法で生成できる言語ならば、 $L$  は正規言語である。  
[Y] 任意の言語  $L$  に対し、 $L$  が正規言語ならば、 $L$  を生成する文脈自由文法が必ず存在する。
- (10) [X] 任意の言語  $L_1, L_2$  に対し、 $L_1$  が正規文法で生成できる言語、 $L_2$  が文脈自由文法で生成できる言語ならば、 $L_1 \cap L_2$  は正規言語である。  
[Y] 任意の文脈自由文法で生成できる言語  $L$  に対し、チョムスキー標準形に変換できない言語  $L$  が存在する。

★選択肢★

- ① [X] 正 [Y] 正    ② [X] 正 [Y] 誤    ③ [X] 誤 [Y] 正    ④ [X] 誤 [Y] 誤

問題4. [文脈自由文法] (配点 20)

次の形式文法  $G_1, G_2$  がある。次の(1)~(7)の問いに答えなさい。ただし、(2), (3)は個数を解答欄に入力すること。

$$G_1 = (\{S_1, A\}, \{a, b\}, \{S_1 \rightarrow aA, A \rightarrow a, A \rightarrow aA\}, S_1)$$

$$G_2 = (\{S_2, A, B\}, \{a, b\}, \{S_2 \rightarrow AB, A \rightarrow a, B \rightarrow b, A \rightarrow aAB\}, S_2)$$

(1) 次の(i)~(iii)それぞれにある[X], [Y]の文章について、その正誤の組み合わせとして正しいものを下の選択肢①~④から1つ選びなさい。

(i) [X]  $G_1$  は正規文法である。 [Y]  $G_1$  はグライバツハ標準形である。

(ii) [X]  $G_2$  は文脈自由文法である。 [Y]  $G_2$  はチョムスキー標準形である。

(iii) [X]  $G_1$  を認識するプッシュダウンオートマトンが存在する。

[Y]  $G_2$  を認識するプッシュダウンオートマトンが存在する。

★選択肢★

① [X] 正 [Y] 正    ② [X] 正 [Y] 誤    ③ [X] 誤 [Y] 正    ④ [X] 誤 [Y] 誤

(2)  $G_1$  が生成する言語  $L(G_1)$  の要素のうち、長さが6以下のものは何個あるか。

(3)  $G_2$  が生成する言語  $L(G_2)$  の要素のうち、長さが6以下のものは何個あるか。

(4)  $G_1$  が生成する言語  $L(G_1)$  はどれか。下の①~⑥から1つ選びなさい。

①  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a \geq 0\}$     ②  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a \geq 1\}$     ③  $\{x \mid x \in \Sigma^*, |x|_a \geq 2\}$

④  $\{a^i \mid i \geq 0\}$     ⑤  $\{a^i \mid i \geq 1\}$     ⑥  $\{a^i \mid i \geq 2\}$

(5)  $G_2$  が生成する言語  $L(G_2)$  はどれか。下の①~⑧から1つ選びなさい。

①  $\{a^i b^j \mid i = j\}$     ②  $\{a^i b^j \mid i \neq j\}$     ③  $\{a^i b^j \mid i > j\}$     ④  $\{a^i b^j \mid i < j\}$

⑤  $\{a^i b^j \mid i + 1 = j\}$     ⑥  $\{a^i b^j \mid i + 1 \neq j\}$     ⑦  $\{a^i b^j \mid i + 1 > j\}$     ⑧  $\{a^i b^j \mid i + 1 < j\}$

(6)  $L_3 = L(G_1) \cup L(G_2)$ 、 $L_4 = L(G_1) \cap L(G_2)$  とする。 $L_3, L_4$  は正規言語か? 正しいものを①~④から選びなさい。

①  $L_3$  も  $L_4$  も正規言語である。

②  $L_3$  は正規言語であるが、 $L_4$  は正規言語でない。

③  $L_3$  は正規言語でないが、 $L_4$  は正規言語である。

④  $L_3$  も  $L_4$  も正規言語でない。

(7) (6)と同じく  $L_3 = L(G_1) \cup L(G_2)$ 、 $L_4 = L(G_1) \cap L(G_2)$  とする。 $L_3, L_4$  は文脈自由文法で表現することができるか? 正しいものを①~④から選びなさい。

①  $L_3$  も  $L_4$  も可能。

②  $L_3$  は可能だが、 $L_4$  は不可能。

③  $L_3$  は不可能だが、 $L_4$  は可能。

④  $L_3$  も  $L_4$  も不可能。

問題は以上です。期末試験頑張ってください。